

文章编号: 1000-7032(2010)03-0454-05

晶体摆动场的辐射衰减与能量增益

张 梅¹, 罗晓华^{2,3}, 罗诗裕^{1*}, 邵明珠¹

(1. 东莞理工学院 电子工程学院, 广东 东莞 523106; 2. 重庆大学 电气工程学院, 重庆 400044;

3. 重庆交通大学 图书馆, 重庆 400074)

摘要: 由于晶体弯曲、电子多重散射和晶格热振动引起的粒子退道, 辐射同原子相互作用引起的电离损失, 以及系统非线性引起的全局分叉与混沌行为等, 晶体摆动场辐射面临的问题比自由电子激光要复杂得多。首先, 引入晶体摆动场自发辐射谱分布, 并在简谐近似下讨论了运动方程、系统增益和能量衰减。结果表明: 一般情况下辐射谱只有少数几条谱线, 而在简谐近似下, 谱线只有一条。其次, 指出了辐射能量比较高时, 衰减是主要的, 选择的晶体长度必须小于衰减长度, 且可选择正电子或质子作炮弹; 当辐射能量比较低时, 退道是主要的, 选择的晶体长度必须小于退道长度, 且可选择重离子作炮弹。

关键词: 摆动场辐射; 谱分布; 增益系数; 辐射衰减

中图分类号: O431.1; TN241 **PACS:** 61.80.Az **PACC:** 6180M **文献标识码:** A

1 引 言

目前, 自由电子激光的发展方向之一就是如何获得短波长、大功率的自由电子激光。但是, 要用传统的方法把自由电子激光推向更短的波长将在技术上遇到严重挑战。如果把自由电子激光同晶体摆动场辐射相结合, 可望把激光推向 X-能区或 γ -能区。

20 世纪 90 年代, 以科洛尔为代表的彼得堡科学家们提出了用声学方法使晶体周期弯曲^[1-6], 并指出带电粒子在周期弯曲的晶体中运动时, 除了产生自发的沟道辐射外, 还将产生相干的摆动场辐射。近年来, 这个小组就一直在试图寻找这种新光源, 特别是短波长的激光光源。注意到自由电子激光和摆动场辐射的主要差别就在于前者运动在真空中, 而后者运动在晶格场中。可见, 晶体摆动场辐射面临的问题比自由电子激光要复杂得多。例如, 由于晶体弯曲、电子多重散射和晶格热振动引起的粒子退道, 辐射同原子相互作用引起的电离损失, 以及系统非线性引起的全局分叉与混沌行为等等^[7-9]。正是这些原因, 如何把沟道辐射改造为 X-激光或 γ -激光已走过近 30 年的历程, 如何利用

周期弯曲的晶体来获得 X-激光或 γ -激光也经历了 10 多年时间。虽然, 至今还未能能在实验室成功获得 X-激光或 γ -激光, 而他们的工作却为人们寻找新光源开辟了一个全新方向。

值得注意的是, 不管用什么方法企图把自发的沟道辐射改造为相干辐射, 都需要首先知道带电粒子的退道长度、辐射能损和能量增益等方面的知识, 而这些知识都与自发辐射谱分布直接相关, 本文就对此进行讨论。首先, 引入晶体摆动场自发辐射谱分布, 并在简谐近似下进一步讨论运动方程、系统增益和能量衰减。结果表明: 一般情况下辐射谱只有少数几条谱线, 而在简谐近似下, 只有一条谱线。其次, 指出了辐射能量比较高时, 衰减是主要的, 选择的晶体长度必须小于衰减长度; 当辐射能量比较低时退道是主要的, 选择的晶体长度必须小于退道长度。还指出了对于高能情形, 可选择正电子或质子作炮弹, 低能情形可选择重离子作炮弹。

2 粒子运动方程与简谐近似

2.1 运动方程

假设用声学方法已将晶体做了如下弯曲

收稿日期: 2009-01-25; 修订日期: 2009-06-24

基金项目: 广东省自然科学基金(8151170003000010)资助项目

作者简介: 张梅(1977-), 女, 陕西宝鸡人, 主要从事光电子技术的研究。

E-mail: shaomz@dgut.edu.cn

*: 通讯联系人; E-mail: bgluoshy@dgut.edu.cn; luoshy@dgut.edu.cn; Tel: (0769)84232232

形式^[1~6]

$$x(z) = a_u \sin(2\pi z/\lambda_u) \quad (1)$$

其中 a_u 是“振幅”, λ_u 是周期变化的晶体摆动场“波长”。

在偶极近似下,粒子的横向运动可以用经典方法来描述。根据牛顿第二定律,粒子运动方程可表示为

$$m_0\gamma \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d}{dx}V(x) = pv\kappa(z), \quad (2)$$

其中 $V(x)$ 是粒子-晶体相互作用势, p 是粒子动量, v 是粒子速度。在超相对论情况下, $v \approx c, z = ct, \gamma$ 是相对论因子, 而 $pv\kappa(z)$ 是由于晶体弯曲产生的离心力, $\kappa(z)$ 是曲率, 由式(1)的二阶导数给出, 且可具体表示为

$$\kappa(z) = \kappa_0 \sin \frac{2\pi z}{\lambda_u}, \quad (3)$$

其中 $\kappa_0 = \kappa_u^2 a_u$ 。将式(3)代入方程(2), 可得

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{m_0\gamma} \frac{dV(x)}{dx} = a_f \sin \Omega_u t, \quad (4)$$

其中 $a_f = \frac{pv\kappa_0}{m_0\gamma}$ 是离心加速度, $\Omega_u = \frac{2\pi c}{\lambda_u} = \kappa_u c$ 是实验室坐标中晶体摆动场频率。

一般说来,粒子-晶体相互作用势 $V(x)$ 可以取不同形式(比如 Lindhard 势、Molierwe 势和正弦平方势等), 方程(4)是一个复杂的非线性方程, 具有分叉和混沌的动力学特征。本文引入简谐近似, 对它的基本特征进行描述。

2.2 简谐近似

在简谐近似下,粒子运动方程可表示为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Omega_c^2 x = a_f \sin \Omega_u t, \quad (5)$$

其中

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{V''(0)}{m_0\gamma}} = \Omega_0 \gamma^{-1/2}, \quad (6)$$

$\Omega_0 = \sqrt{\frac{2\pi^2 V_0}{m_0 d^2}}$ 是实验室坐标中沟道粒子的振动频率, m_0 是粒子静止质量, d 是晶面间距, V_0 是势阱深度。

由微分方程理论, 方程(5)的解可表示为

$$x = a_c \cos(\Omega_c t + \varphi) + \frac{a_u}{\sigma^2 - 1} \sin \Omega_u t, \quad (7)$$

其中 $\sigma = \Omega_c/\Omega_u$ 。式(7)表明, 带电粒子的运动轨迹由两部分组成, 右端第一项是沟道运动轨迹, 第

二项是摆动场轨迹。沿着这两类轨道运动的带电粒子都将不断向外辐射电磁波, 前者称为沟道辐射, 后者称为晶体摆动场辐射。事实上, 经典物理证明, 在电磁场中运动的粒子, 只要它的加速度不为零, 就要向外辐射能量, 在晶格场中运动的带电粒子也不例外。

3 自发辐射谱分布

3.1 角分布

在偶极近似下, 文献[10]导出了自发辐射角分布:

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{2\pi c} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{|\dot{\beta}_x|}{(1 - \beta \cos\theta)^4} \cdot [(1 - \beta \cos\theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2\theta \cos^2\varphi] \cdot \delta[l\Omega - \omega(1 - \beta \cos\theta)], \quad (8)$$

其中 $\delta[l\Omega - \omega(1 - \beta \cos\theta)]$ 是 δ 函数。 $\dot{\beta}_{lx}$ 是 $\dot{\beta}_x$ 的 l 阶傅立叶分量, 且可表示为

$$\dot{\beta}_{lx} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{\beta}_x(t) e^{il\Omega t} dt, \quad (9)$$

而 β_x 是无量纲的粒子横向加速度, 由运动方程确定, 其他参数的物理意义见文献[10]。

3.2 谱密度分布

完成对(8)式的立体角积分, 并引入单位阶跃函数, 可将辐射谱密度表示为

$$\frac{dI}{d\omega} = \alpha h \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\omega_l |\dot{\beta}_x|^2}{\Omega^2} f(\xi), \quad (10)$$

其中 $\xi = \omega/\omega_l, \alpha = 2\pi e^2/ch$ 是精细结构常数, 而

$$f(\xi) = \xi(1 - 2\xi + 2\xi^2)\theta(\omega_l - \omega)/l^2, \quad (11)$$

是谱密度分布的线形因子, $\theta(\omega_l - \omega)$ 是单位阶跃函数。从式(10)可以看出, 只要知道 $\dot{\beta}_x, \omega_l$ 和线形因子 $f(\xi)$ 问题就全部解决, 而这一切都归结为寻找运动方程的解或系统 Hamiltonia。图1给出

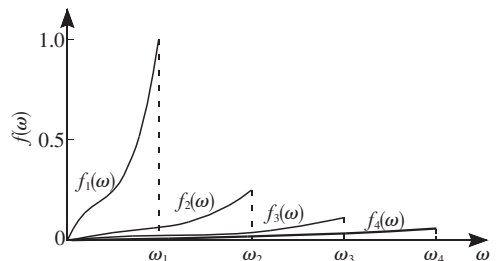


图1 一般情况下自发发射的线形因子。

Fig. 1 The line-type factor for a spontaneous radiation in the general case

了晶体摆动场辐射的线形因子。从图 1 可以看出,随着谐波数 l 增加,辐射“强度”迅速减小,通常情况下,谐波数 l 只取少数几个值。下面在简谐近似下,进一步对谱密度进行讨论。

3.3 简谐近似

在简谐近似下,粒子运动方程由式(5)描写,而它的解由式(7)给出。注意到 β_{lx} 是 β_x 的 l 阶傅立叶分量,而 $\beta_x = \frac{v_x}{c}$ 是无量纲的粒子横向速度,

$v_x = \frac{dx}{dt}$ 是粒子横向速度。令 $a = \frac{a_u}{\sigma^2 - 1}$, 由摆动场轨道(式(7)右端第二项),可求得

$$\beta_{lx} = \frac{a}{T} \int \sin \Omega_u t e^{i\Omega_u t} dt = -\frac{a\Omega_u^3}{2\pi c} \times \begin{cases} 0, & l \neq 1 \\ -i \frac{\pi}{\Omega_u}, & l = 1 \end{cases} \quad (12)$$

上式表明,在简谐近似下,摆动场辐射只有一条谱线,且谐波数 l 只能取 1。将式(12)代入式(10),并注意式(11)就可求出晶体摆动场自发辐射谱密度分布,结果如图 2 所示。从图 2 可以看出,随着频率增加“强度”也在增加,在 ω_1 附近急剧上升,且在 ω_1 处突然截止。当然,由于本底噪声,实验上是观察不到 $\omega \ll \omega_1$ 的这部分谱线的。

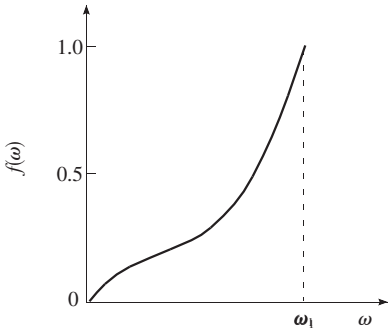


图 2 简谐近似下晶体摆动场辐射的线形因子

Fig. 2 The line-type factor of the crystalline undulator field radiation in a harmonic approximation

4 增益系数与辐射衰减

4.1 增益系数

增益系数 $g(\omega)$ 由公式

$$dN = g(\omega) N dz, \quad (13)$$

定义,其中 N 是距离为 z 处的光子数, $dN(z)$ 是距离变化 dz 后的光子增量。通常,增益系数与光子的发射和吸收有关,与辐射的角分布有关,且可一

般表示为^[1-3]

$$g(\omega) = - (2\pi)^3 n \frac{c^2}{\omega^2} \frac{d}{d\varepsilon} \left[\frac{d^2 E}{d\omega dO} \right]_{\theta=0} \Delta\omega \Delta O, \quad (14)$$

注意到 $\frac{d^2 E}{d\omega dO} = \frac{d^2 I}{d\omega dO} dt$, 而 $\frac{d^2 I}{d\omega dO}$ 由式(8)给出,其中 $\Delta\omega$ 是一次谐波辐射谱线宽度, ΔO 是受激辐射张开的立体角。

积分式(13),可得光子数

$$N = N_0 \exp[g(\omega)L] = N_0 \exp[G(\omega)], \quad (15)$$

其中 $L \leq L_d$ 是晶体厚度,而 $G(\omega) = g(\omega)L$ 是系统总增益。将式(8)代入式(14),完成微分,并注意过程的合理性,可将系统总增益近似表示为

$$G(\omega) \approx (2\pi)^3 n r_0 Z \left(\frac{Z}{M} \right) \frac{L^3}{\gamma^3 \lambda_u} \times \begin{cases} 1, & p^2 > 1 \\ p^2, & p < 1 \end{cases} \quad (16)$$

其中 n 是束流密度, r_0 是原子波尔半径, p 是摆动场参数,而 $\frac{Z}{M} \leq 1$ 是粒子的荷质比,对于质子 $\frac{Z}{M} = 1$; 对于重离子 $\frac{Z}{M} < 1$ 。上式表明,系统总增益 $G(\omega)$ 与晶体厚度 L^3 和电荷数 Z^2 成正比。可见,晶体越厚、离子越重 $G(\omega)$ 越大。但因离子越重,束流密度越小,增益会受到影响。选择什么离子作炮弹需综合考虑。

为了获得大的增益,常规的自由电子激光器可以做得很长,实际上,磁场摆动器不能做得太长纯粹是技术上的原因。而晶体摆动器的长度将受到更多因素的限制,比如退道效应^[11,12]、辐射衰减和系统增益等因素的影响。

4.2 辐射衰减

当晶体摆动场辐射同晶体相互作用时,由于电离损失,光通量将逐渐衰减。当光子数衰减到原来的 $1/e$ 时,给出了衰减长度定义。通常衰减长度 $L_a(\omega)$ 可由经验公式^[1,2]

$$L_a(\omega) = \begin{cases} \infty, & \hbar\omega < I_0 < 10 \text{ eV} \\ 0.01, \dots, 10 \text{ cm}, & \hbar\omega > 10 \text{ eV} \end{cases} \quad (17)$$

描述,其中 I_0 是原子电离势,一般为几个 eV。当光子的能量大于电离势时原子就电离。光子能量越大电离作用越强,这种情况下,光通量衰减主要由电离损失决定。假设 L_d 是粒子退道长度,晶体厚度的选择必须满足条件 $L < \min [L_d(C),$

$L_a(\omega)$]。下面讨论高能($\hbar\omega > 10 \text{ keV}$, $L_a > 0.01 \text{ cm}$)和低能($\hbar\omega < I_0 < 10 \text{ eV}$)两种情形。

4.2.1 高能情形

对于这种情况,束流能量一般取 $\gamma > 10^3$,而相应的辐射能量大约为 $\hbar\omega > 1 \text{ keV}$,位于X-能区,随着能量增加,辐射能量还将进入 γ -能区。由于电离损失较大,只能选择晶体厚度 $L \leq L_a$ 。而且,由于辐射能量高,不能使用常规的反射镜,总增益 $G(\omega) > 1$ 的条件必须在束流一次穿过晶体时实现。这种情况非常类似于自由电子激光中的“自放大自发辐射(Self-Amplified Spontaneous Emission, SASE)”情形。但是,这就要求束流密度 n 必须很大($\approx 10^{21}$ 粒子/cm³),要求有一台强流加速器提供这种粒子束。目前的加速器技术可提供这种强度的轻离子(比如,电子、正电子和质子等);而重离子加速器提供的重离子束流却比这个强度低得多。因此,对于高能情形,目前选择的炮弹大都是正电子或质子。换句话说,当前晶体摆动场辐射实验大都采用正电子或质子作炮弹。

4.2.2 低能情形

由于能量低($\hbar\omega < I_0 < 10 \text{ eV}$),电离损失小,晶体厚度只受退道长度限制($L \leq L_d$);因能量低,可以使用常规的反射镜,允许辐射多次穿过晶体,实现总增益 $G(\omega) > 1$ 。由于允许辐射可以多次穿越,这就有效地降低了对束流密度的要求。注意到,当束流长度为 L_b 时,辐射多次穿越晶体的次数可达 $L_b/L_d \approx 10^4$ 次,相应的束流密度则可降

低 10^4 。比如,对于重粒子,如果要求一次通过就能达到 $G(\omega) > 1$ 的话,束流密度大约是 $n \approx 10^{18}$ 粒子/cm³量级,由于允许多次穿越,只需要加速器提供的束流密度为 $n \approx 10^{14}$ 粒子/cm³即可。对于低能情形,可选择重粒子作炮弹。换句话说,当前设计的晶体摆动场辐射实验大都建议采用重粒子作炮弹。

5 结 论

自由电子激光和摆动场辐射的主要差别在于前者运动在真空中,而后者运动在晶格场中。显然,晶体摆动场辐射面临的问题比自由电子激光要复杂得多。例如,由于晶体弯曲、电子多重散射和晶格热振动引起的粒子退道,辐射同原子相互作用引起的电离损失以及系统非线性引起的全局分叉与混沌行为,等等。本文就对其中部分问题进行讨论。首先,在经典场论基础上引入自发辐射谱分布,并在简谐近似下进一步讨论晶体摆动场辐射的能量增益和辐射衰减。结果表明:一般情况下,辐射谱只有少数几条谱线,而在简谐近似下,谱线只有一条;其次,指出了辐射能量比较高时,衰减是主要的,选择的晶体长度必须小于衰减长度;当辐射能量比较低时,退道是主要的(由于晶体弯曲、电子多重散射和晶格热振动等因素引起),选择的晶体长度必须小于退道长度。还指出了对于高能情形,可选择正电子或质子作炮弹,低能情形可选择重离子作炮弹。

参 考 文 献:

- [1] Korol A V, Solovoyov A V, Greiner W, et al. Photon emission in crystalline undulator [J]. *Nucl. Inst. Methods in Physics Research B*, 2008, **266**(8):1173-1176.
- [2] Korol A, Solovoyov A V, Greiner W. *Advanced Radiation Sources and Applications* [M]. Wiedemann H(ed.), Netherlands: Springer, 2006:165-189.
- [3] Korol A V, Solovoyov A V, Greiner W. Channeling of positrons through periodically bent crystals: on Feasibility of crystalline undulator and gamma-laser [J]. *Int. J. Mod. Phys. E*, 2004, **13**(5):867-916.
- [4] Tabrizi M, Korol A V, Solovoyov A V, et al. Feasibility of an electron-based crystalline undulator [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2007, **98**(16):164801-1-4.
- [5] Bryukov V M, Afonin A G, Baranov V T, et al. *Accelerator Test of Crystal Undulators* [M]. Wiedemann H(ed.), Netherlands, Springer, 2006:191-200.
- [6] Korol A V, Andrey V, Solovoyov A V, et al. Total energy losses due to the radiation in an acoustically bended undulator: the undulator and the channeling radiation included [J]. *Int. J. Mod. Phys. E*, 2000, **9**(1):77-105.
- [7] Wang Yaxun, Shao Mingzhu, Luo Shiyu. The coherent parametric ray radiation and dechanneling effects in bent crystal

- [J]. *Seimiconductor Optoelectronics*(半导体光电), 2009, **30**(2):223-226 (in Chinese).
- [8] Luo Shiyu, Shao Mingzhu. Possibility of undulator radiation as short length laser by a periodically bent crystal [J]. *Chin. J. Laser* (中国激光), 2009, **36**(6):1378-1382 (in Chinese).
- [9] Zhang Li, Wang Shanjin, Luo Shiyu, *et al.* The parametric X-ray radiation and local bifurcation of rotated periodic orbit in system [J]. *Chin. J. Lumin.* (发光学报), 2009, **30**(4):520-524 (in Chinese).
- [10] Tan Yongming, Shao Mingzhu, Luo Shiyu, *et al.* Ch-2x potential and classical description of planar channeling radiation for relativistic electron [J]. *Chin. J. Lumin.* (发光学报), 2005, **26**(2):163-67 (in Chinese).
- [11] Luo Shiyu, Shao Mingzhu. Sine-squared potential and chaotic behaviour of strained superlattice [J]. *Chin. J. Semiconductors* (半导体学报), 2005, **26**(2):294-297 (in Chinese).
- [12] Shao Mingzhu, Luo Shiyu. The $\tan 2x$ potential and the eigenvalue and eigenfunction for planar channeling radiation [J]. *Acta Phys. Sin.* (物理学报), 2005, **54**(9):4092-4096 (in Chinese).

The Radiation Attenuation and Energy Gain for Crystalline Undulator Field

ZHANG Mei¹, LUO Xiao-hua^{2,3}, LUO Shi-yu¹, SHAO Ming-zhu¹

(1. College of Electric Engineering, Dongguan University of Technology, Dongguan 523106, China;

2. College of Electric Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China;

3. Library, Chongqing University of Communications, Chongqing 400074, China)

Abstract: The problem included in the crystalline undulator field radiation is complex and more the free electron laser because of the dechanneling effect by the crystal bend, the electron multi-scattering and the thermal oscillation of the lattice, the ionization loss by an interaction between the radiation with an atom, the global bifurcation and the chaotic behaviours by the nonlinearity of the system, *etc.* Firstly, the introducing the spectral distribution of a spontaneous radiation for the crystalline undulator field based on the classical field theory, the particle motion equation, the gain factor and the radiation attenuation were discussed in a harmonic approximation. The results showed that there is few radiation lines in the general case; and there is only one line in a harmonic approximation. Secondly, it was pointed out that the radiation attenuation is major if energy is higher, then the crystal length must be selected smaller than the dechanneling length, and one may select a positron or a proton as projectile; in addition, the dechanneling effect is major if energy is lower, then the crystal length must be selected smaller than the attenuation length, and one may select a heavy ion as projectile.

Key words: crystalline undulator radiation; spectral distribution; gain factor; radiation attenuation

CLC number: O431.1; TN241

PACS: 61.80.Az

PACC: 6180M

Document code: A