文章编号： 1000-7032(2009)04-0520-05

参数 X 射线辐射与旋转周期轨道的局域分叉

张　莉[1]，王善进[2]，罗诗裕[2*]，邵明珠[2]
（1. 惠州学院 电子科学系，广东 惠州　516015；　2. 东莞理工学院 电子工程学院，广东 东莞　523106）

摘要： 寻找新光源，特别是利用参数 X 射线辐射（PXR）、沟道辐射（CR）或晶体摆动场辐射（CUR）作为新的光源引起了人们极大关注。要成功获得这些新光源，粒子运动必须是稳定的。但是，由于辐射衰减、晶格热振动、电子多重散射和相互作用势的非线性等因素的影响，系统将产生退道、分叉、混沌等不稳定现象，从而对这些辐射的反射、衍射、聚焦和谱分布产生直接影响。讨论了旋转周期轨道的分叉对系统稳定性的影响。在经典力学框架内和偶极近似下，引入正弦平方势，把粒子运动方程化为了具有阻尼项、受迫项和常数力矩的广义摆方程。利用 Jacobian 椭圆函数和椭圆积分给出了系统的解和粒子运动周期，用 Melnikov 方法构造了旋转型周期轨道的 Melnikov 函数，并用这个方法分析了系统的局部分叉性质。结果表明，系统的临界条件与它的参数有关，只需适当调节这些参数，系统的分叉（或不稳定性）就可以原则上避免，从而进一步保证有效地输出 PXR、CUR 或 CR 辐射等。

关　键　词： 参数 X 射线辐射；准沟道辐射；Melnikov 方法；分叉
中图分类号： O471.5；O571.33　　**PACS：** 72.20. -6；78.67. Pt　　**PACC：** 6180M；0547　　**文献标识码：** A

1　引　　言

1976 年，前苏联科学家 Kumakhov 发现了沟道辐射[1]，同年，Tsyganov 预言了可以利用弯晶来控制带电粒子[2]，并在 1984 年，首次实现了对能量为 1 GeV 的质子束的偏转。值得注意的是，正是在束流控制的研究中，人们还进一步发现了可以利用弯晶来产生、衍射、引出和聚焦参数 X 射线辐射（Parametric X-ray radiation，PXR）、沟道辐射（Channeling radiation，CR）和晶体摆动场辐射（Crystalline undulator radiation，CUR），在人们寻找新光源，特别是短波长激光光源的探索中弯晶起到了十分重要的作用。

由于弯晶的引入，人们开始了对聚焦 PXR 的研究，并使衍射的 PXR 研究成为可能[3~5]。注意到对于周期弯曲的晶体，带电粒子除了产生沟道辐射外，还将产生晶体摆动场辐射[6~10]。沟道辐射和晶体摆动场辐射同弯晶相互作用将产生反射、折射、聚焦或衍射等现象，如果能成功引出衍射的 PXR、CR 或 CUR，可望获得新的短波长激光。

注意到 PXR 在弯晶中的反射、折射、聚焦或衍射等行为实际上就是 X-波段的 CUR 或 CR 同弯晶相互作用的结果。图 1 给出了如何利用弯晶来实现聚焦和衍射 PXR 辐射示意图[1(a)是俯视图，1(b)是侧视图]，P^+ 表示质子或带正电的沟道粒子。将一板状晶体做图 1(a)所示的圆柱形弯曲。设曲率半径为 R，对称轴为 f，并假设带电粒子在倒格矢 $\boldsymbol{g}$ 标记的沟道中运动。如果倒格矢 $\boldsymbol{g}_1$ 与粒子轨迹成 45°角，当 PXR 同 $\boldsymbol{g}_1$ 描述的这一族晶面相互作用时，将被这一族晶面反射，并沿着半径聚焦到 f 轴上的 F_1 和 F_2[见图 1(b)]。如果能够将它成功收集，就可获得典型的聚焦 PXR 源。如果用倒格矢 $\boldsymbol{g}_3$ 表示另一族与粒子运动轨迹垂直的晶面（沿径向），当 PXR 与这一族晶面相互作用时，将被这一族晶面垂直反射，并沿着粒子运动相反的方向传播。当 PXR 的频率（或 CUR、CR 中的某一频率）$\omega = \omega_B$，且符合布拉格衍射条件时，将被另一族晶面（比如，用倒格矢 $\boldsymbol{g}_2$ 表示的晶面）衍射，并沿半径聚焦到 f 轴上的点 F_3[见图 1(b)]。如果能够将它收集，就可获得聚焦的衍射 PXR 源。由于这种光源具有相干性，可

收稿日期： 2009-01-25；**修订日期：** 2009-06-24
基金项目： 广东省自然科学基金（8151170003000010）资助项目
作者简介： 张莉（1974 -），女，黑龙江佳木斯人，主要从事光、电子学科方面的教学和科研工作。
*：通讯联系人；E-mail：bgluoshy@dgut.edu.cn，Tel：（0769）22696473，84232232

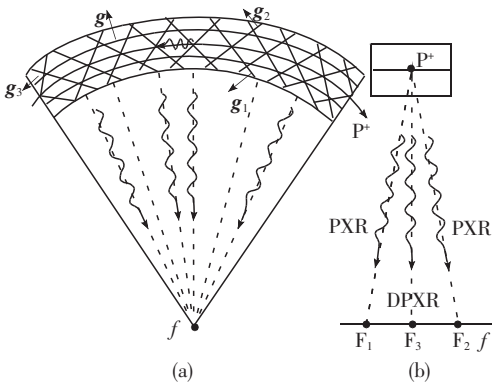

图 1　利用弯晶聚焦和衍射 PXR 的示意图

Fig. 1　The schematic diagram of the focused and the diffracted parametric X-ray radiation (PXR) by bent crystal

望成为新的短波长激光光源。

寻找新光源，特别是企图利用参数 X 射线辐射、沟道辐射或晶体摆动场辐射作为新的光源引起了人们极大关注。当然，要成功获得这些光源，粒子运动必须是稳定的。但是，由于晶体弯曲、辐射衰减、晶格热振动、电子多重散射和相互作用势的非线性等因素的影响，系统将产生退道、分叉、混沌等不稳定现象，从而对这些辐射的反射、衍射、聚焦和谱分布均产生直接影响。为此，本文将进一步考虑晶体弯曲、运动阻尼和非线性的影响。在经典力学框架内和偶极近似下，引入正弦平方势，把粒子在弯晶中的运动方程化为具有阻尼项、受迫项和常数力矩的广义摆方程。利用 Jacobian 椭圆函数和椭圆积分给出了系统的解和粒子运动周期，用 Melnikov 方法构造了旋转型周期轨道的 Melnikov 函数，并用这个方法分析了系统的分叉性质。结果表明，系统的临界条件与它的物理参数有关，只需适当调节这些参数，系统的分叉（或不稳定性）就可以原则上避免，从而保证有效地输出 PXR、CUR 或 CR 辐射等，为寻找短波长光源（特别是短波长激光光源）提供理论分析。

2　粒子运动方程与旋转周期解

如果将（板状）晶体做图 1 所示的圆柱形弯曲，设曲率半径为 R，对称轴为 f；并假设已经用声振动方法将它做如下形式的周期弯曲

$$x(z) = a\sin(2\pi z/\lambda_u) \tag{1}$$

其中 a 是“振幅”，λ_u 是周期变化的晶体摆动场“波长”。于是，晶体同时具有了常曲率和变曲率两种弯曲。适当选择坐标系，粒子的横向运动可表示为

$$r(t) = R + x(t) \tag{2}$$

其中 $x(t)$ 是粒子离开平衡轨道的距离。在偶极近似下，$x(t)$ 满足牛顿第二定律

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + 2m\mu_0\frac{dx}{dt} + \frac{d}{dx}V(x) = pv[\kappa_0 + \kappa(z)] \tag{3}$$

其中 $\kappa_0 = 1/R$，右端第一项是常曲率弯曲产生的离心力，第二项是晶体周期弯曲产生的离心力；$V(x)$ 是粒子-晶体相互作用势，p 是粒子动量，v 是粒子速度，在超相对论情况下有 $v \approx c$；μ_0 是阻尼系数，物理意义由文献[11]给出，$m = m_0\gamma$，m_0 是粒子静止质量，γ 是相对论因子。而

$$\kappa(z) = \kappa_m \sin\frac{2\pi}{\lambda_u}z \tag{4}$$

是晶体周期弯曲的“瞬时”曲率，由曲线(1)的二阶导数给出，其中 $\kappa_m = \Omega_u^2 a$，而 $z \approx ct$。

引入正弦平方势[12~14]

$$V(x) = K\beta\sin^2(\pi x/d) \tag{5}$$

其中 β 是势参数，而

$$K = \pi z_1 z_2 e^2 N d^2 \tag{6}$$

d 是晶面间距，Nd^2 是晶体原子的面密度，z_1 是入射粒子的原子序数，z_2 是靶原子序数。令

$$\xi = 2\pi x/d,\ \delta = \frac{2\pi^2 K\beta}{md^2},\ \tau = \delta^{1/2}t \tag{7}$$

$$\mu = \mu_0/\delta^{1/2},\ \omega = \Omega_u/\delta^{1/2},$$
$$Q = \frac{2\pi pv\kappa_0}{m\delta d},\ f = \frac{2\pi pv\kappa_m}{m\delta d} \tag{8}$$

可将运动方程(3)化为

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + 2\mu\frac{d\xi}{d\tau} + \sin\xi = Q + f\cos\omega\tau \tag{9}$$

其等价系统可以表示为

$$\xi' = \zeta$$
$$\zeta' = -\sin\xi + \varepsilon(Q - 2\mu\zeta + f\sin\omega\tau) \tag{10}$$

其中 ε 是小参数，表示伴随它的项为 $O(\varepsilon)$ 量级。系统(9)或(10)是一个典型的动力学系统，具有典型的全局分叉性质与混沌行为。

对于无扰动系统，方程(10)化为

$$\dot{\xi} = \zeta$$
$$\dot{\zeta} = -\sin\xi \tag{11}$$

系统(11)在相平面(ξ,ζ)上有一个平衡点(0,0)和两个非平衡点$(-\pi,0)$和$(\pi,0)$点。积分一次

可得系统的 Hamiltonian 量

$$h = \frac{\zeta^2}{2} + (1 - \cos\xi) \tag{12}$$

根据 h 的大小,相平面上的轨道可分为三类:异宿轨道($h=2$);振荡型周期轨道($0<h<2$)和旋转周期轨道($h>2$)。当 $h>2$ 时,轨道是周期的,描写了带电粒子的准沟道和准沟道辐射情形,且可用 Jacobian 椭园函数表示为

$$\xi = \pm 2\arcsin\left(\mathrm{sn}\,\frac{\tau}{\kappa}\right) \tag{13}$$

$$\zeta = \pm \frac{2}{\kappa}\mathrm{dn}\,\frac{\tau}{\kappa} \tag{14}$$

式中 $\mathrm{dn}\tau$ 为 Jacobian 椭园函数。振动周期由

$$T^r = 2\kappa K(\kappa) \tag{15}$$

给出,当 h 单调减少时,周期 T^r 由零增加到无穷。下面用 Melnikov 方法构造旋转型周期轨道(13,14)的 Melnikov 函数,并用这个方法分析系统的分叉(不稳定)性质。

3 旋转型周期轨道的 Melnikov 函数

对于任意一组互质正整数 m, n,存在唯一的一个 $\kappa^r_{m/n} \in (0,1)$,

使得 $T^r(\kappa^r_{m/n}) = 2\kappa^r_{m/n}K(\kappa^r_{m/n}) = \frac{m}{n}T = \frac{2\pi m}{n\omega}$,

构造这条轨道的 Melnikov 函数,可得

$$M_r^{m/n}(\tau_0) = \int_0^{mT} \zeta_+^r(\tau,\kappa)[Q - 2\mu\zeta_+^r(\tau,\kappa) + f\sin\omega(\tau+\tau_0)]\mathrm{d}\tau = \begin{cases} \text{与 } \tau_0 \text{ 无关的常数}, & \text{当 } n \neq 1 \text{ 或 } m \text{ 为偶数时} \\ \dfrac{2f\pi}{\mathrm{ch}[\kappa\omega K'(\kappa)]}\left[\dfrac{2\mu}{\delta_m^r} + \sin\omega\tau_0\right], & \text{当 } n = 1 \text{ 且 } m \text{ 为奇数时} \end{cases} \tag{16}$$

其中 ζ_+^4 由式(14)给出,而

$$\delta_m^r = \frac{c_m}{\frac{Q}{2\mu} - b_m};\ c_m = \frac{f}{\mathrm{ch}[\kappa\omega K'(\kappa)]};$$

$$b_m = \frac{4}{\pi};\ \kappa = \kappa_m^r \tag{17}$$

κ 满足 $2\kappa K(\kappa) = \frac{2\pi m}{\omega}$,$m$ 为正整数。在参数(Q,μ)平面上,如果条件

$$S_m^r: 0 \leqslant \mu \leqslant |\delta_m^r/2| \tag{18}$$

满足,则对于充分小的 ε,在无扰动系统(11)的旋转型周期解(13)和(14)附近,扰动系统也存在同样类型的周期解。由式(16)可以看出,Melnikov 函数的零点方程为

$$\frac{2\mu}{\delta_m^r} + \sin\omega\tau_0 = 0 \tag{19}$$

可见,当 $\tau_0 \in [0,T]$ 时,Melnikov 函数有两个简单零点,这就保证了在这个区间上总有一点可以使 $M_r^m(\tau_0)$ 的导数为负,换句话说,系统(10)总存在一组稳定的周期为 mT 的旋转型次谐解。

4 旋转型周期轨道的次谐分叉

4.1 旋转型周期轨道的次谐分叉条件

将式(5~8)代入式(18),可将次谐分叉的条件用原始参数表示为

$$\frac{pv\kappa_0 - \frac{4}{\pi}\mu_0\sqrt{2mK\beta}}{pv\kappa_m} < \left|\mathrm{sech}(\kappa K'(\kappa)\Omega_u d\sqrt{m/(2\pi^2 K\beta)}\right|,\quad \kappa = \kappa_m' \tag{20}$$

下面对不等式(20)做进一步讨论。

4.2 旋转型周期轨道次谐分叉的物理意义

(1)从条件(20)可以看出,系统周期弯曲幅值 κ_m 越小条件越不容易满足。当晶体无周期弯曲($\kappa_m=0$)时,不等式左端为无穷,条件(20)永远不满足,系统不存在次谐分叉轨道,状态是稳定的。如果 $\kappa_m \neq 0$,则系统的临界条件可以表示为

$$(pv\kappa_m)_c = \left|\frac{pv\kappa_0 - 4\mu_0\sqrt{2mK\beta}/\pi}{\mathrm{sech}[\kappa K'(\kappa)\Omega_u d\sqrt{m/(2\pi^2 K\beta)}]}\right| \tag{21}$$

当 $2\pi pv\kappa_m < (2\pi pv\kappa_m)_c$[或 $\kappa_m < (\kappa_m)_c$]时系统是稳定的,当 $\kappa_m > (\kappa_m)_c$ 时,条件(20)满足,系统存在次谐分叉轨道,状态不稳定。

(2)由式(20)还可以看出,左端项的分子绝对值越大,条件越不容易满足,系统表现得越稳定。注意到当分子中的 $\kappa_0=0$ 或系统阻尼系数($2\mu_0$)越大时绝对值越大。结合条件(1)可以看出,当 $\kappa_0=0$ 和 $\kappa_m=0$ 时,系统最稳定。换句话说,对于直沟道,系统最稳定,这正是人们预料之中的。如果 $\kappa_0 \neq 0$,则系统的临界条件可表示为

$$(pv\kappa_0)_c = \left| pv\kappa_m \mathrm{sech}\left[\kappa K'(\kappa)\Omega_u d\sqrt{m/(2\pi^2 K\beta)} + \frac{4}{\pi}\mu_0\sqrt{2mK\beta}\right]\right| \tag{22}$$

即，当 $pv\kappa_0 > (pv\kappa_0)_c$ 系统是稳定的；当 $pv\kappa_0 < (pv\kappa_0)_c$ 系统不稳定。

(3)注意到系统阻尼系数($2\mu_0$)越大，分子的绝对值也越大，条件(20)越不容易满足；换句话说，仅当系统阻尼足够强时才可能抑制分叉(不稳定)的发生。其临界值可表示为

$$(2\mu_0)_c = \left|\frac{\pi pv}{\sqrt{8mK\beta}}\left[\kappa_0 - \kappa_m \cdot \mathrm{sech}(\kappa K'(\kappa)\Omega_u d\sqrt{m/(2\pi^2 K\beta)}\right]\right| \tag{23}$$

也就是说，当阻尼系数满足条件 $2\mu_0 > (2\mu_0)_c$ 时，系统是稳定的；当 $2\mu_0 < (2\mu_0)_c$ 时，系统不稳定。

5　结　　论

寻找新光源，特别是企图利用沟道辐射或晶体摆动场辐射作为新的光源引起了人们极大关注，并取得了好的进展；值得注意的是，要成功获得这些光源，粒子运动必须是稳定的。但是，由于晶体弯曲、辐射衰减、晶格热振动、电子多重散射和相互作用势的非线性等因素的影响，系统将产生退道、分叉、混沌等不稳定现象，从而对这些辐射的反射、衍射、聚焦和谱分布产生直接影响。为此，在经典力学框架内和偶极近似下，引入正弦平方势，把粒子在弯晶中的运动方程化为具有阻尼项、受迫项和常数力矩的广义摆方程。利用 Jacobian 椭圆函数和椭圆积分给出了系统的解和粒子运动周期，用 Melnikov 方法构造了旋转型周期轨道的 Melnikov 函数，并用这个方法分析了系统的分叉性质。结果表明，系统的临界条件与它的物理参数有关，只需适当调节这些参数，系统的分叉(或不稳定性)就可以原则上避免，从而保证有效地输出 PXR 或 CR 辐射等，为寻找短波长光源(特别是短波长激光光源)提供了理论分析。

参　考　文　献：

[1] Kumaklov M A. On the theory of electromagnetic radiation of charged particles in a crystal [J]. *Phys. Lett.* A, 1976, **57**(1):17-18.

[2] Tsyganov E N. Some aspect of the mechanism of a charge particle penetration through a monocrystal [R]. USA: Fermi-Lab. TM-682, 1976.

[3] Kubankin A S, Nasonov N N. On the possibility of using parametric X-ray radiation to stady anisotropy of a crystal mosac structure [J]. *Journal of Surface Investigation*: X-*ray*, *Synchrotron and Neutron Techniques*, 2008, **2**(2):317-320.

[4] Shchagin A V. Dffraction in forward direction of parametric X-ray radiation from relativistic particles of moderat energy [J]. *SPIE*, 2007, **6634**:663418-1-9.

[5] Shchagin A V. *Advanced Radiation Sources and Applications* [M]. ed. By Wiedemann Natherlands: Springer, 2006, 27-45.

[6] Korol A V, Solovyov A V, Greiner W, *et al.* Photon emission in crystalline undulator [J]. *Nucl. Inst. and Meth. in Physics Research* B, 2008, **266**(8):1173-1176.

[7] Korol A, Soloyyov A V, Greiner W. *Advanced Radiation Sources and Applications* [M]. ed. By Wiedemann Natherlands: Springer, 2006:165-189.

[8] Tabrizi M, Korol A V, Solovyov A V, *et al.* Feasibility of an electron-based crystalline undulator [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2007, **98**(16):164801-1-4.

[9] Korol A V, Solovyov A V, Greiner W. Channeling of positrons through periodically bent crystals: on the feasibility of crystalline undulator and gamma-laser [J]. *Int. J. Mod. Phys.* E, 2004, **13**:867-916.

[10] Bryukov K M, Afonin A G, Baranov V T, *et al.* *Advanced Radiation Sources and Applications* [M]. ed. By Wiedemann Natherlands: Springer, 2006, 191-200.

[11] Luo Shiyu, Shao Mingzhu. Dislocation model for strained superlattice and dechannelling effects of a particles [J]. *Chin. J. Semiconductors* (半导体学报), 2003, **24**(5):485-489 (in Chinese).

[12] Luo Shiyu, Shao Mingzhu. Sine-squared potential and Kumakhov radiation for particles [J]. *Chin. Phys.* (USA), 1984, **4**(7):670-674.

[13] Luo S Y, Shao Mingzhu, Liu Z R. The chaotic behaviours in bent crystal channel [J]. *Acta Phys. Sin.* (物理学报), 1988, **37**(8):1394-1400 (in Chinese).

[14] Luo S Y, Shao Mingzhu. The sine-squared potential and the general properties of planar channeling radiation for positron [J]. *Acta Phys. Sin.* (物理学报), 2006, **55**(3):1324-1327 (in Chinese).

The Parametric X-ray Radiation and Local Bifurcation in Rotated Periodic Orbit System

ZHANG Li[1], WANG Shan-jin[2], LUO Shi-yu[2], SHAO Ming-zhu[2]

(1. *Department of Electronic Science*, *Huizhou University*, *Huizhou* 516015, *China*;

2. *Department of Electronic Engineering*, *Dongguan University of Technology*, *Dongguan* 523106, *China*)

Abstract: An exploration by a parametric X-ray radiation, channeling radiation and crystalline Undulator radiation as a new light source has given rise to extensive attention. The particle motion must be stable in order to obtain these sources. But, because the radiation damp, the vibration of lattice, the electron multi-scattering and non-linearity of interaction potential of a particle with crystal, the instabilities by the dechanneling, birfucation and chaos exists in the system, thus the reflaction, the diffraction, the focus and the spectral distribution of these radiations will be effected. The effects of the stabilities by a bifurcationc of the rotated periodic orbit is regarded specifically in the paper. In the classical mechanics frame and the dipole approximation the particle motion equation is reduced to the generalized pendulum equation with a dampping, a force terms and the constant moment by the sine-squared potential. The solution of the equation and the period of the particle motion for a non-pertubated system are expressed exactly by means of Jacobian elliptic function and the 1-st kind elliptic integral. Melnikov function of the rotated periodic orbit is constructed, and also bifurcation of the system is analyzed by the method. It was shown that the critical condition of the system entered in a birfurcation is related to its parameters, provided regulating a parameters of the system, the birfurcation (an instability) can be avoided in principle. Thus, the effective export of the coherent, channeling radiation and crystalline undulator radiation can be assured furtherlly.

Key words: parametric X-ray radiation; quasi-channeling radiation; Melnikov method ; bifurcation

CLC number: O471.5; O571.33 **PACS**: 71.20.-6; 78.67.Pt **PACC**: 6180M; 0547 **Document code**: A

Received date: 2009-01-25